数理解析研究所講究録
749巻 1991年 15-31

Asymptotic Normality of Nonparametric Sequential Density Estimators

新潟大・理　　磯貝　英一　（Eiichi Isogai）

§1. 序

X_1, X_2, $\cdots$ は，ある確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ で定義された独立で同一分布に従う p 次元確率変数列で，確率密度関数 f(x) （f(x) の形は未知である）を持つとする。また，N(t) (t > 0) は $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上で定義された正の整数値をとる確率変数（停止規則）の族とする。kernel を用いた f(x) の推定量として，いくつか提案されている。non-recursive estimators として，Parzen-Rosenblatt type [10], [12], recursive estimators として，Wolverton-Wagner-Yamato type [17] の推定量が考えられている。recursive estimators として，そのほかに Wegman and Davies [16], Isogai [6] などがある。大量のデータを扱う場合，データが追加されたとき recursive estimators は non-recursive estimators に比べて，推定量をもとめるのに手間が省けるという利点を持つ。

一方，標本の大きさが確率的である場合がある。たとえば、つぎの問

題を考えてみる。確率変数Xはある製品が壊れるまでの時間を表すとし，分布関数 $F(x)$，確率密度関数 $f(x)$ を持つとする。いま、0からt時間内に対する reliability $R^*(x)=1-F^*(x)$，hazard rate $Z^*(x)=f^*(x)/(1-F^*(x))$ を推定したい。ただし，$F^*(x)=F(x)/F(t)$，$f^*(x)=f(x)/F(t)$ $(0 \leq x \leq t)$。n を検査する製品の数，$N(t)$ を t 時間内に壊れた製品の数としたとき，X_1, …，$X_{N(t)}$に基づいて$R^*(x)$，$Z^*(x)$ を推定する。$R_n(x)$，$Z_n(x)$ を大きさ n の標本による $R(x)$，$Z(x)$ の推定量とするとき，たとえば，sequential estimators として$R^*_{N(t)}(x)$，$Z^*_{N(t)}(x)$ が考えられる。このとき，$R^*_{N(t)}(x)$，$Z^*_{N(t)}(x)$ の統計的性質を調べることが問題になる。このように，$f(x)$ の推定においても sequential estimators $f_{N(t)}(x)$ を考えなければならないことがある。sequential estimators を扱ったものに，Srivastava [14], Davies and Wegman [4], Carroll [2], Wegman and Davies [16], Isogai [7] and [9], Stute [15] などがある。Density estimation に関しては，Prakasa Rao [11], Devroye and Györfi [5] などにまとめられている。

本報告では，次の sequential estimators $f_{N(t)}(x)$ を考え，$N(t)$ についての一般的な条件の下で $t \to \infty$ として $f_{N(t)}(x)$ の漸近正規性を示す。

$$(1.1) \qquad f_{N(t)}(x) = \sum_{j=1}^{N(t)} a_j \beta_{jN(t)} K_j(x, X_j) + \beta_{0\,N(t)} K(x),$$

$$(1.2) \qquad K_n(x, y) = h_n^{-p} K((x-y)/h_n) \qquad \text{for } x, y \in R^p,$$

ここに，$K(x)$ は R^p 上で有界かつ可積分な実数値ボレル関数であり，$\{h_n\}$は 0 に収束する，非増加な正数列である。また、

$$a_n = a/n \qquad \text{for any fixed } a \in (0,1] \tag{1.3}$$

$$\beta_{mn} = \begin{cases} \prod_{j=m+1}^{n} (1-a_j) & \text{if } n > m \geq 0 \\ 1 & \text{if } n = m \geq 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

$a=1$のとき，$f_n(x)$ はWolverton-Wagner-Yamato type になる。

§ 2. 主結果

§ 1 における関数 $K(x)$ は次の条件を満たすとする。

条件K

$$\int_{R^p} K(u)\,du = 1, \quad \int_{R^p} \|u\|^2 |K(u)|\,du < \infty,$$

$$\int_{R^p} u_i K(u)\,du = 0 \quad \text{for } i=1, \ldots, p \text{ with } u=(u_1, \ldots, u_p) \quad \text{and}$$

$$\|u\|^p |K(u)| \to 0 \quad \text{as} \quad \|u\| \to \infty,$$

ここに， $\|\cdot\|$ はR^p上のユークリッドノルムを表す。

§ 1 における$\{h_n\}$は次の条件を満たすとする。

条件H

$a \in (0,1]$ を任意に1つ固定する。

(H1) $nh_n^p \uparrow \infty$ as $n \to \infty$,

(H2) $n^{1-2a} h_n^p \to 0$ as $n \to \infty$,

(H3) $n^{1-2a} h_n^p \sum_{j=1}^{n} j^{2(a-1)} h_j^{-p} \to \beta$ as $n \to \infty$ for some constant $\beta > 0$,

(H4) $n^{3/2-3a} h_n^{3p/2} \sum_{j=1}^{n} j^{3(a-1)} h_j^{-2p} \to 0$ as $n \to \infty$,

(H5) $(n^{1-2a} h_n^p)^{1/2} \sum_{j=1}^{n} j^{a-1} h_j^2 \to 0$ as $n \to \infty$,

(H6) For any $\varepsilon > 0$ there esists a positive constant $\delta = \delta(\varepsilon)$ such that $| n/m - 1 | < \delta$ implies $| h_n/h_m - 1 | < \varepsilon$.

<u>条件Kおよび条件Hを満たす例</u>

$x=(x_1,\ldots,x_n)$ とする。

$$K(x) = \begin{cases} 2^{-p} & \text{if } |x_i| \le 1 \text{ for all } i=1,\ldots,p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$K(x) = (2\pi)^{-p/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} x_j^2\right)$$

$$K(x) = 2^{-p} \exp\left(-\sum_{j=1}^{p} |x_j|\right)$$

$$h_n = n^{-r/p},\ \max\{p/(p+4), 1-2a\} < r < 1$$

このとき，$\beta = (2a+r-1)^{-1}$ となる。

つぎに，f とN(t) に関連する定義を与える。

定義１　g は R^p 上の実数値関数とする。次の条件を満たすとき，g はクラス $\mathcal{M}_p$ に属するという：

すべての $i, j=1, ..., p$ に対して，R^p上で有界かつ連続な２回偏導関数 $\partial^2 g(x)/\partial x_i \partial x_j$ が存在する。

定義２　正の整数値をとる確率変数の族 $\{N(t),\ t>0\}$ が次を満たすとき，条件A を満たすという：

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の正値確率変数 θ （即ち，$P\{\theta>0\}=1$ ）と，$\tau(t)\to\infty$ as $t\to\infty$ なる正数の族 $\{\tau(t)\ t>0\}$ が存在して

$$N(t)/\tau(t) \underset{P}{\to} \theta \text{ as } t\to\infty \text{ (in probability)}$$

が成り立つ。

註1　Srivastava [14], Carroll [2], Isogai [9], Stute [15] では $\theta = c$ （$c>0$ は定数）の場合を考えている。Isogai [8], [9] では θ が正の値をとる離散型確率変数の場合を扱っている，すなわち、$\sum_k P\{\theta = l_k\} = 1$ を満たす正数列 $\{l_k, k=1,2,...\}$ （k は有限でも無限でもよい）が存在する。

さて，定理を与える。

<u>定理</u>　f はクラス $\mathcal{M}_p$に属するとする。もし $N(t)$ が 条件Aを満たすならば，$f(x)>0$ となる各 x に対して

$$(N(t)h^p_{N(t)})^{1/2}(f_{N(t)}(x)-f(x)) \underset{L}{\rightarrow} N(0,\sigma^2(x)) \quad \text{as } t\to\infty \text{ (in law)}$$

が成り立つ。ただし，

$$\sigma^2(x)=a^2\beta f(x)\int_{R^p} K^2(u)\,du.$$

<u>註 2</u>　Isogai [8], [9] では θ が正の値をとる離散型確率変数の場合，この定理は成立することが証明された。

この定理の1つの応用として f(x) の信頼区間を求める。$\{d(t),t>0\}$は $\lim_{t\to\infty} d(t)=0$ を満たす正数の族とし，区間の幅が 2d の区間

$$I_{n,t}(x)=[f_n(x)-d(t),f_n(x)+d(t)]$$

を考える。$\alpha\in(0,1)$ を固定し，$D>0$ は $\Phi(D)-\Phi(-D)=1-\alpha$ を満たすとする，ただし，Φ は $N(0,1)$の分布関数である。

<u>系</u>　f はクラス $\mathcal{M}_p$に属し，$N(t)$ は条件Aを満たすとする。もし

$$d^2(t)[\tau(t)\theta]h^p_{[\tau(t)\theta]} \underset{P}{\rightarrow} \sigma^2(x)D^2 \quad \text{as } t\to\infty$$

ならば

$$P\{f(x)\in I_{N(t),t}(x)\} \rightarrow 1-\alpha \quad \text{as } t\to\infty$$

が成り立つ。

（証明）　条件Aと(H6)より

$$N(t)h^p_{N(t)}/[\tau(t)\theta]h^p_{[\tau(t)\theta]} \underset{P}{\to} 1 \text{ as } t\to\infty$$

よって，仮定と定理より

$$D(f_{N(t)}(x)-f(x))/d(t) = \sigma(x)D/(d(t)([\tau(t)\theta]h^p_{[\tau(t)\theta]})^{1/2})$$

$$\times([\tau(t)\theta]h^p_{[\tau(t)\theta]}/N(t)h^p_{N(t)})^{1/2}\times(N(t)h^p_{N(t)})^{1/2}(f_{N(t)}(x)-f(x))/\sigma(x)$$

$$\underset{L}{\to} N(0,1) \quad \text{as } t\to\infty \text{ (in law)}.$$

従って，

$$P\{f(x)\in I_{N(t),t}(x)\} = P\{D|f_{N(t)}(x)-f(x)|/d(t)\le D\} \to 1-\alpha \text{ as } t\to\infty.$$

（証終）

§3．停止規則の具体例

$f_n(x)$ を $f(x)$ の kernelを用いた推定量とする。この章ではこれまでに提案されている停止規則を与え，いくつかの結果を列挙する。

1．Carroll [2]，Isogai [7]:

各　$d>0$ に対して

$$N(d)=\text{the first } n\ge n_0 \text{ such that } nh^p_n\ge(b/d)^2 f_n(x)$$

ただし，bはある正の定数，n_0は与えられた正の整数である

で N(d) を定義する。このとき，

$$N(d)h^{p}_{N(d)}/[(b/d)^{2}f(x)] \to 1 \quad \text{a.s. as } d\to 0$$

$$E[N(d)h^{p}_{N(d)}]/[(b/d)^{2}f(x)] \to 1 \quad \text{as } d\to 0$$

$$\lim_{d\to 0} P\{f(x)\in I_{N(d),d}(x)\}=1-\alpha, \quad I_{N(d),d}(x)\equiv[f_{N(d)}(x)-d, f_{N(d)}(x)+d]$$

$$f_{N(d)}(x) \to f(x) \quad \text{a.s.} \quad \text{as } d\to 0$$

が成り立つ。

特に，$h_n=n^{-r/p}$ $(\max\{p/(p+4), 1-2a\}<r<1)$ として，

$$N(d)/\{(b/d)^{2}f(x)\}^{1/(1-r)} \to 1 \quad \text{a.s.} \quad \text{as } d\to 0.$$

$\tau(d)=\{(b/d)^{2}f(x)\}^{1/(1-r)}$，$\theta\equiv 1$ とおくと，条件Aが満たされる。

2．Sen and Ghosh [13]，Stute [15]:

$L_n<U_n$ a.s. となるdに無関係な統計量を見つけて，

$$N(d)=\text{the first } n\geq n_0 \text{ such that } U_n-L_n\leq 2d$$

で N(d) を定義し，$I_{N(d)}\equiv[L_{N(d)}, U_{N(d)}]$ とおく。

Sen and Ghosh [13]:

$\tau(d)=(b/d)^{2}$，b>0 はある定数，$\theta\equiv 1$ とおくと，条件Aが満たされる。

Stute [15]:

$$I_n=[f_n(x-\Lambda_n)-\mu_n(nh_n)^{-1/2}, f_n(x+\Lambda_n)-\mu_n(nh_n)^{-1/2}]$$

$$N(d) = \text{the first } n \geq 1 \text{ such that the length of } I_n \leq 2d$$

で N(d) を定義し， $\tau(d) \equiv b/d^{5/2}$，$\theta \equiv 1$ (b>0 はある定数)とおくと，条件Aが満たされる。

3． その他

Davies and Wegman [4]:

M は与えられた正の整数で，任意の $\varepsilon > 0$ を与える。

$$N(\varepsilon, M) = \text{the first } n \geq 1 \text{ such that } |V_n(x)| < \varepsilon$$

で N(ε,M) を定義する、ただし、

$$V_n(x) = f_{nM}(x) - f_{(n-1)M}(x) .$$

このとき，

$$P\{N(\varepsilon, M) < \infty\} = 1, \quad E[N^r(\varepsilon, M)] < \infty \text{ for every } r \geq 0$$

$$f_{N(\varepsilon, M)}(x) \rightarrow f(x) \text{ a.s. as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Wegman and Davies [16]:

$\varepsilon > 0$ を任意に与える。

$$N(\varepsilon) = \text{the first } n \geq 1 \text{ such that } h_n^{-1} K((x - X_n)/h_n) < \varepsilon$$

で N(ε) を定義する。このとき，

$$P\{N(\varepsilon) < \infty\} = 1, \quad E[N^k(\varepsilon)] < \infty \text{ for every } k \geq 0$$

$$f_{N(\varepsilon)}(x) \rightarrow f(x) \text{ a.s. as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

§ 4．定理の証明

この章では，ある程度簡略して定理の証明をする。また，この章全体を通して定理のすべての条件が満たされるとする。[b] は b を越えない最大の整数を表すとし，特記しない限り N(t),τ(t) の t を省略する。さらに，任意の x を固定する。

(4.1) $$Z_n = K_n(x,X_n) - EK_n(x,X_n),\ \delta_n = EK_n(x,X_n) - f(x) \quad \text{and}$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j\beta_{jn}\{K_j(x,X_j) - f(x)\},\ V_n = (nh_n^p)^{1/2}S_n \quad \text{for } n \geq 1$$

とおく。また

$$\gamma_1 = 1 \quad \text{and} \quad \gamma_n = \sum_{j=2}^{n}(1-a_j) \quad \text{for } n \geq 2,$$

とおくと，

$$\beta_{mn} = \gamma_n\gamma_m^{-1} \quad \text{for } n \geq m \geq 1.$$

明らかに

(4.2) $$(Nh_N^p)^{1/2}(f_N(x) - f(x)) = V_N + (Nh_N^p)^{1/2}\beta_{0N}(K(x) - f(x)) \quad \text{for } t > 0 .$$

ここで，次の補題を示す。

<u>補題</u>　定理の条件の下で

$$(N(t)h_{N(t)}^p)^{1/2}(S_{N(t)} - S_{[\theta\tau(t)]}) \underset{P}{\to} 0 \quad \text{as } t\to\infty$$

が成り立つ。

（証明）　任意に ε,η∈(0,1) を固定する。Cとc は εとη に関係しない，

それぞれ，十分大きな，十分小さな正の定数とし，以下ではすべて定数はCとcで表す。Φを標準正規分布の分布関数として，

$1-\Phi(G)+\Phi(-G) < c\eta$を満たす正定数 G を選ぶ。$\theta$ は正値をとるから，次を満たす整数 $m \geq 1$ と$\rho \in (0,1/2)$ が選べる。

(4.3) $$P\{\theta < (m-1)/2^m\} + P\{\theta \geq m\} < \eta/4 \quad \text{and} \quad m > \max(C\varepsilon^{-2}\eta^{-1},\ CG\varepsilon^{-1})$$

(4.4) $$0 < \rho < \min(c\varepsilon^2\eta,\ C^{-1}G^{-1}\varepsilon).$$

事象A_{km}を $A_{km} = \{(k-1)/2^m \leq \theta < k/2^m\}$ for $m \leq k \leq m2^m$ で表す。条件Aより

(4.5) $$P\{|N - [\theta\tau]| \geq \rho[\theta\tau]\} < \eta/4 \quad \text{for large } t.$$

(4.3)と(4.5)より十分大きな t に対して

(4.6) $$P\{\sqrt{Nh_N^p}\ |S_N - S_{[\theta\tau]}| > \varepsilon\}$$

$$\leq \sum_{k=m}^{m2^m} P\{\sqrt{Nh_N^p}\ |S_N - S_{[\theta\tau]}| > \varepsilon,\ |N - [\theta\tau]| < \rho[\theta\tau],\ A_{km}\} + \eta/2.$$

任意の$k=m,\cdots,m2^m$を固定し，

(4.7) $$n_1 = n_1(t) = [(k-1)\tau/2^m],\quad n_2 = n_2(t) = [k\tau/2^m],$$

$$m_1 = m_1(t) = [(1-\rho)n_1],\quad m_2 = m_2(t) = [(1+\rho)n_2]$$

とおく。(4.7)より

(4.8) $$I_k(t) \equiv P\{\sqrt{Nh_N^p}\ |S_N - S_{[\theta\tau]}| > \varepsilon,\ |N - [\theta\tau]| < \rho[\theta\tau],\ A_{km}\}$$

$$\leq P(A_{km})[P\{\sqrt{ih_i^p}\ |S_i - S_j| > \varepsilon \text{ for some } m_1 \leq i < n_1 \text{ and some } n_1 \leq j \leq n_2\ |A_{km}\}$$

$$+ P\{\sqrt{ih_i^p}\,|S_i - S_j| > \varepsilon \text{ for some } n_1 \le i, j \le n_2 \,|A_{km}\}$$

$$+ P\{\sqrt{ih_i^p}\,|S_i - S_j| > \varepsilon \text{ for some } n_2 < i \le m_2 \text{ and some } n_1 \le j \le n_2 \,|A_{km}\}]$$

$$\equiv P(A_{km})(J_1 + J_2 + J_3), \text{ say.}$$

はじめに，J_1 を評価する。 nh_n^p の単調性を用いると，

$$J_1 \le P\{\sqrt{n_1 h_{n_1}^p} \max_{m_1 < i \le n_1} |S_i - S_{m_1}| > \varepsilon/3 \,|A_{km}\} \tag{4.9}$$

$$+ P\{\sqrt{n_2 h_{n_2}^p} \max_{n_1 < j \le n_2} |S_j - S_{n_1}| > \varepsilon/3 \,|A_{km}\}$$

$$\equiv J_{11} + J_{12}, \text{ say.}$$

(4.1), γ_n の単調性から $i > j$ に対して

$$|S_i - S_j| \le (\gamma_j - \gamma_i)\,\Big|\sum_{q=1}^{j} a_q \gamma_q^{-1} Z_q\Big| + \gamma_i \,\Big|\sum_{q=j+1}^{i} a_q \gamma_q^{-1} Z_q\Big| \tag{4.10}$$

$$+ \Big|\sum_{q=1}^{i} a_q \beta_{qi} \delta_q\Big| + \Big|\sum_{q=1}^{j} a_q \beta_{qj} \delta_q\Big|.$$

Isogai [9] の(A.9)と同様にして，

$$\sqrt{n_1 h_{n_1}^p} \max_{m_1 \le i \le n_1} \Big|\sum_{q=1}^{i} a_q \beta_{qi} \delta_q\Big| < \varepsilon/4 \quad \text{for large } t.$$

よって，(4.10)より，十分大きな t に対して

$$J_{11} \le P\{\sqrt{n_1 h_{n_1}^p}\,(\gamma_{m_1} - \gamma_{n_1})\,\Big|\sum_{q=1}^{m_1} a_q \gamma_q^{-1} Z_q\Big| > \varepsilon/4 \,|A_{km}\} \tag{4.11}$$

$$+ P\{\sqrt{n_1 h_{n_1}^p} \max_{m_1<i\le n_1} \gamma_i |\sum_{q=m_1+1}^{i} a_q \gamma_q^{-1} Z_q| > \varepsilon/4 \ |A_{km}\}$$

$$\equiv J_{111} + J_{112}, \text{ say.}$$

Blum, Hanson and Rosenblatt [1] のLemma 3 から

$$\limsup_{t\to\infty} J_{112} = \limsup_{t\to\infty} P\{\sqrt{n_1 h_{n_1}^p} \max_{m_1<i\le n_1} \gamma_i |\sum_{q=m_1+1}^{i} a_q \gamma_q^{-1} Z_q| > \varepsilon/4\}. \tag{4.12}$$

Isogai [9] の(A.17)の不等式および(4.4)を用いると,

(4.12)の右辺 $< 4C\varepsilon^{-2}\rho$. 従って, (4.4)より

$$\limsup_{t\to\infty} J_{112} < c\eta. \tag{4.13}$$

ここで

$$U_n = a_n \gamma_n^{-1} Z_n, \quad W_n = \sum_{q=1}^{n} U_q \quad \text{and} \quad w_n^2 = \sum_{q=1}^{n} a_q^2 \gamma_q^{-2} E Z_q^2$$

とおく。Isogai [9]の(2.5)および(2.6)で次のことが示された。

$$w_n^2 \sim \sigma^2(x)(n h_n^p \gamma_n^2)^{-1} \quad \text{as } n\to\infty \quad \text{and} \tag{4.14}$$

$$W_n / w_n \xrightarrow[L]{} N(0,1) \quad \text{as } n\to\infty. \tag{4.15}$$

(4.14), h_nの単調性により

$$\sqrt{n_1 h_{n_1}^p}\,(\gamma_{m_1} - \gamma_{n_1})\, w_{m_1} \le C\rho \quad \text{for all } t>0.$$

従って, Isogai [9] のLemma 2.5, (4.4), (4.15)から $\limsup_{t\to\infty} J_{111} < C\eta$.

この不等式と(4.11), (4.13)より

(4.16) $\limsup_{t\to\infty} J_{11} < c\eta.$

(4.16)と同様にして

(4.17) $\limsup_{t\to\infty} J_{12} < c\eta.$

故に，(4.9), (4.16), (4.17)から

(4.18) $\limsup_{t\to\infty} J_{1} < c\eta.$

(4.18)と同様にして

$$\limsup_{t\to\infty} J_2 < c\eta \quad \text{and} \quad \limsup_{t\to\infty} J_3 < c\eta$$

が得られる。よって、この結果と(4.6), (4.8), (4.18)を用いると

$$\limsup_{t\to\infty} P\{\sqrt{Nh_N^p}\,|S_N - S_{[\theta\tau]}| > \varepsilon\} \le c\eta \sum_{k=m}^{m2^m} P(A_{km}) + \eta/2 \le c\eta + \eta/2 < \eta$$

が成り立つ。 $\eta\to0$ として補題が得られる。

(証終)

さて，定理の証明をする。明らかに

(4.19) $$V_N = V_{[\theta\tau]} + \sqrt{Nh_N^p}\,(S_N - S_{[\theta\tau]}) + V_{[\theta\tau]}\{(Nh_N^p/[\theta\tau]h^p_{[\theta\tau]})^{1/2} - 1\}.$$

条件Aを用いると， $\sqrt{Nh_N^p}\,\beta_{0N} \underset{P}{\to} 0$ as $t\to\infty$ かつ

$Nh_N^p/[\theta\tau]h^p_{[\theta\tau]} \underset{P}{\to} 1$ as $t\to\infty$ が成立する。従って，もし

(4.20) $V_{[\theta\tau]} \underset{L}{\to} N(0,\sigma^2(x))$ as $t\to\infty$

が示せれば，(4.2), (4.19), 補題より定理が成立する。以下で(4.20)を示す。

Fを$N(0,\sigma^2(x))$の分布関数とする。(4.20)を示すには

$$(4.21) \quad \lim_{t\to\infty} P\{V_{[\theta\tau]} \le y\} = F(y) \quad \text{for any } y$$

を示せばよい。任意の$\eta>0$を与える。任意のyと，ηに関係しない十分小さい正定数cを固定する。$1-F(G)+F(-G)<c\eta$ を満たす$G>0$を選ぶ。また，$P\{\theta<(m-1)/2^m\} + P\{\theta\ge m\} < c\eta$ を満たす十分大きな整数$m>1$と，$|F(y+i\varepsilon)-F(y)|<\eta/4$ for $i=\pm1$ を満たす$\varepsilon>0$を選ぶ。

I(A)を集合Aの定義関数とし，　$\mu_m=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^m}I((k-1)/2^m\le\theta<k/2^m)$

とおく。このとき，μ_mは正の値をとる離散型確率変数である。従って，Isogai [9] の(3.4)から

$$(4.22) \quad V_{[\mu_m\tau]} \underset{L}{\to} N(0,\sigma^2(x)) \quad \text{as } t\to\infty$$

が得られる。よって，Blum, Hanson and Rosenblatt [1] のLemma 1, (4.22)を用いると，

$$(4.23) \quad \limsup_{t\to\infty} |P\{V_{[\theta\tau]}\le y\}-F(y)| \le \limsup_{t\to\infty} P\{|V_{[\theta\tau]}-V_{[\mu_m\tau]}|>\varepsilon\}+\eta/2$$

が成立する。(4.19)と同じ関係式を用いると，

$$(4.24) \quad P\{|V_{[\theta\tau]}-V_{[\mu_m\tau]}|>\varepsilon\} \le P\{([\theta\tau]h^p_{[\theta\tau]})^{1/2}|S_{[\theta\tau]}-S_{[\mu_m\tau]}|>\varepsilon/2\}$$

$$+ P\{|(([\theta\tau]h^p_{[\theta\tau]}/[\mu_m\tau]h^p_{[\mu_m\tau]})^{1/2}-1)V_{[\mu_m\tau]}|>\varepsilon/2\}$$

$$\equiv I_1 + I_2, \text{ say.}$$

(4.16)と同様の議論により，十分大きなtに対して

(4.25) $\quad I_1 < c\eta$

が得られる。一方，(4.22), (H6)などを用いて議論すると，十分大きなtに対して

(4.26) $\quad I_2 < c\eta$

がわかる。従って，(4.23), (4.24), (4.25), (4.26) より(4.21)が成立する。

（証終）

参考文献

[1] Blum, J.R., Hanson, D.L., and Rosenblatte, J.I. (1963). On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1, 389-393.

[2] Carroll, R.J. (1976). On sequential density estimation. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 36, 137-151.

[3] Chow, Y.S. and Robbins, H. (1965). On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean. Ann. Math. Statist. 36, 457-462.

[4] Davies, H.I. and Wegman, E.J. (1975). Sequential nonparametric density estimation. IEEE Trans. Inform. Theory IT-21, 619-628.

[5] Devroye, L. and Györfi, L. (1985). Nonparametric Density Estimation: The L_1 View. Wiley, New York.

[6] Isogai, E. (1980). Strong consistency and optimality of a sequential

density estimator. Bull. Math. Statist. 19, 55-69.

[7] Isogai,E. (1981). Stopping rules for sequential density estimation. Bull. Math. Statist. 19, 53-67.

[8] Isogai, E. (1985). 逐次手法における停止時間について。 京都大学数理解析研究所講究録 557, 203-221.

[9] Isogai, E. (1987). On the asymptotic normality for nonparametric sequential density estimation. Bull. Inform. Cybernetics, 22, 215-224.

[10] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. Ann. Math. Statist. 33, 1065-1076.

[11] Prakasa Rao, B. L. S. (1983). Nonparametric Functional Estimation. Academic Press.

[12] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. Ann. Math. Statist. 27, 832-837.

[13] Sen, P.K. and Ghosh, M. (1971). On bounded length equential confidence intervals based on one-sample rank order statistics. Ann. Math. Statist. 42, 189-203.

[14] Srivastava, R.C. (1973). Estimation of probability density function based on random number of observations with applications. Internat. Statist.Rev. 41, 77-86.

[15] Stute, W. (1983). Sequential fixed-width confidence intervals for a nonparametric density function. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 62, 113-123.

[16] Wegman, E.J. and Davies, H.I. (1979). Remarks on some recursive estimators of a probability density. Ann. Statist. 7, 316-327.

[17] Yamato, H. (1971). Sequential estimation of a continuous probability density function and mode. Bull. Math.Statist. 14, 1-12.